Задачи

1. Пусть $\{F_n\}$ – последовательность Фибоначчи, то есть последовательность, задаваемая соотношением $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ и начальными условиями $F_1 = F_2 = 1$.
   a. Вычислите первые 20 чисел Фибоначчи. Для каждого m<10 вычислите остатки от деления этих чисел на m.
   b. Докажите, что последовательность остатков от деления чисел Фибоначчи на любое натуральное m периодична.
   c. Пусть $\pi(m)$ – соответствующий период. Докажите, что $\pi(m) \le m^2$. Попробуйте выяснить, достигается ли здесь равенство.
   d. Докажите, что $\pi(m)$ наименьшее k при котором F_k и $F_{k+1} - 1$ делятся на m.
   e. Докажите, что если m, n взаимно просты, то $\pi(mn) = НОК(\pi(m), \pi(n))$. Как использовать этот факт для вычисления $\pi(m)$ в общем случае, если мы умеем вычислять эту функцию для степеней простых чисел?
   f. Докажите, что если p – простое и $\pi(p^2) \ne \pi(p)$, то $\pi(p^k) = p^{k-1}\pi(p)$. Можете ли Вы придумать какое-то обобщение на случай $\pi(p^2) = \pi(p)$?
   g. Покажите, что если простое число p дает остаток 1 или 9 при делении на 10, то $p-1$ делится на $\pi(p)$. Что Вы можете сказать об аналогах этого результата для других остатков при делении на 10?
   h. Найдите простое число p, для которого $\pi(p^2) \ne \pi(p)$, либо докажите, что его не существует (РЕШЕНИЕ ЭТОЙ ЗАДАЧИ ЖЮРИ НЕ ИЗВЕСТНО).
   i. Какие еще теоремы о функции $\pi(m)$ вы можете доказать?
2. Графики $\pi(m)$
   a. Постройте графики $\pi(m)$ для m<M с различными M. Мы рекомендуем использовать компьютер для решения этой задачи.
   b. Покажите, что $\dfrac{\pi(m)}{m}$ – ограничена. Найдите максимум этой величины.
   c. Обратите внимание, что существует ряд прямых, на которых лежат множество точек графика. Найдите экспериментально уравнения некоторых таких прямых. Можете ли Вы дать теоретическое объяснение этого факта?
   d. Постойте графики функций $S(n) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\pi(k)$ и $M(n) = \max_{1\le k\le n}\pi(k)$ (Здесь мы вновь рекомендуем использовать

компьютер). Какие гипотезы Вы можете сформулировать об этих функциях? Какие из них Вы можете доказать.

3. Другие последовательности
   a. Как изменятся результаты, если вместо последовательности Фибоначчи взять последовательность Люка, заданную соотношением $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ и начальными условиями $L_1 = 1, L_2 = 3$?
   b. А что будет для произвольных начальных условий $L_1 = a, L_2 = b$? В частности, есть ли какая-то связь между аналогами функций $\pi(m)$ в случае различных начальных условий? Играет ли здесь роль взаимная простота a и b?
   c. А если рассмотреть соотношение $L_{n+1} = gL_n + L_{n-1}$ с некоторым натуральным $g>1$ с начальными условиями $L_1 = 1, L_2 = g$?
   d. А что будет для соотношения $L_{n+1} = L_n + L_{n-1} + L_{n-2}$ с начальными условиями $L_1 = L_2 = 1, L_3 = 2$?
   e. Можно ли сказать хоть что-то для произвольной последовательности вида $L_{n+1} = a_1 L_n + a_2 L_{n-1} + ... + a_k L_{n-k+1}$?
   f. Можете ли Вы предложить еще какие-то обобщения?