Московский Физико-Технический Институт (национальный исследовательский университет)

Межвузовский центр воспитания и развития талантливой молодежи в области естественно-математических наук «Физтех-центр»

62-Я ВЫЕЗДНАЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА МФТИ

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Москва 2023

Выездная физико-математическая олимпиада МФТИ 2022-2023 уч. года
Математика
Задания, решения, критерии оценивания

Общие указания по проведению

Время для решения заданий по математике каждого класса — 2 часа.

Черновики не проверяются.

В вариант включаются 4 задачи из 5. Допустимые наборы задач указаны в заголовке для каждого класса по отдельности.

Каждая задача включается в вариант с одним из двух вариантов числовых данных.

Каждая задача по математике оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Максимальное число баллов за олимпиаду 28.

Общие принципы выставления оценки по математике:

- правильное решение — 7 баллов;
- решение с недочетами — 5–6 баллов;
- решение с пропущенными важными случаями, либо с доказанным одним из двух (более сложным) утверждений задачи — 4 балла;
- рассмотрение отдельных важных случаев при отсутствии решения — 1 балл;
- доказательство вспомогательных утверждений, помогающих в решении задачи — 2–3 балла.

Во всех задачах, если это не оговорено специально, только верный ответ без обоснований стоит 0 баллов.

В приведенных после решений задач комментариях указаны баллы за типичные продвижения в решении и ошибки. Баллы за отдельные продвижения суммируются, если это не оговорено отдельно.

Обязательно следует сделать объявление, что если это не оговорено специально, то ответы в каждой задаче требуют объяснения.

Использование любых электронно-вычислительных средств (включая калькуляторы) во время написания олимпиады не допускается.

В вариант включается одна из двух задач 9.3 и 9.4.

М9.1-1 Про вещественные числа x и y известно, что $\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{y}=\dfrac{8}{3y+5x}$. Найдите все возможные значения $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}$.

М9.1-2 Про вещественные числа x и y известно, что $\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}=\dfrac{6}{2y-3x}$. Найдите все возможные значения $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}$.

Ответ. Вариант 1: 514/225, вариант 2: 193/36.

Решение варианта 1. Из условия следует, что $(5y-3x)(3y+5x)=8xy$ или $15(y^2-x^2)=-8xy$. Искомая величина $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}$ может быть преобразована к виду $\dfrac{y^4+x^4}{x^2y^2}=\dfrac{(y^2-x^2)^2+2x^2y^2}{x^2y^2}$, что в силу соотношения равно $\dfrac{(-8/15\cdot xy)^2+2x^2y^2}{x^2y^2}=\dfrac{514}{225}$.

М9.2-1 В школе есть четыре 11-ых класса, в каждом по 25 человек. Найдите количество способов выбрать из них 6 учеников в команду на математический бой так, чтобы из каждого класса был выбран хотя бы один ученик.

М9.2-2 В школе есть пять 11-ых классов, в каждом по 24 человека. Найдите количество способов выбрать из них 7 учеников в команду на математический бой так, чтобы из каждого класса был выбран хотя бы один ученик.

Решение варианта 1. Либо из двух классов было выбрано по 2 человека, а из остальных по одному, либо из одного класса было выбрано 3 человека, а из остальных по одному. В первом случае количество способов составить команду равно $C_4^2\cdot(C_{25}^2)^2\cdot(C_{25}^1)^2$, а во втором, соответственно, $C_4^1\cdot C_{25}^3\cdot(C_{25}^1)^3$. Остаётся сложить эти величины.

Ответ. Вариант 1: $C_4^2\cdot(C_{25}^2)^2\cdot(C_{25}^1)^2+C_4^1\cdot C_{25}^3\cdot(C_{25}^1)^3$, вариант 2: $C_5^2\cdot(C_{24}^2)^2\cdot(C_{24}^1)^3+C_5^1\cdot C_{24}^3\cdot(C_{24}^1)^4$.

Комментарий. Комбинаторная ошибка — 0 баллов за задачу.
Ответ не доведён до числа — баллы не снимаются.

М9.3-1 В квадрате $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке E, а точка F отмечена на отрезке CD так, что $\angle CAF=\angle FAD$. Пусть G — точка пересечения AF и ED. Найдите EG, если $CF=5$.

М9.3-2 В квадрате $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке E, а точка F отмечена на отрезке CD так, что $\angle CAF=\angle FAD$. Пусть G — точка пересечения AF и ED. Найдите CF, если $EG=10$.

Ответ. Вариант 1: $EG=5/2$, вариант 2: $CF=20$.

Решение. Проведём $EK\parallel CF$, $K\in AF$. Тогда в треугольнике EKG $\angle EGK=\angle EKG=67{,}5^\circ$, а EK — средняя линия в треугольнике ACF. Поэтому $CF=2EK=2EG$.

М9.4-1 На стороне BC квадрата $ABCD$ выбрана точка X так, что $BX:XC=1:3$. Затем на продолжении стороны CD за точку D взята точка Y так, что $BX=DY$. Найдите, в каком соотношении прямая XY делит диагональ BD квадрата $ABCD$.

М9.4-2 На стороне BC квадрата $ABCD$ выбрана точка X так, что $BX:XC=1:4$. Затем на продолжении стороны CD за точку D взята точка Y так, что $BX=DY$. Найдите, в каком соотношении прямая XY делит диагональ BD квадрата $ABCD$.

Решение варианта 1. Пусть Z — такая точка на диагонали BD, что $ZX \perp BC$, а W — точка пересечения XY и BD. Треугольники DYW и XZW равны, поэтому $DW = WZ$. А $DZ : ZB = 3 : 1$ по теореме Фалеса. Тогда $DW : WB = 3 : 5$.

Ответ. Вариант 1: отношение $DW : WB = 3 : 5$, вариант 2: $DW : WB = 2 : 3$.

M9.5-1 Вычислите

$$\sqrt{1-\sqrt{1^2-1}}+\sqrt{2-\sqrt{2^2-1}}+\sqrt{3-\sqrt{3^2-1}}+\ldots+\sqrt{200-\sqrt{200^2-1}}$$

M9.5-2 Вычислите

$$\sqrt{8-\sqrt{8^2-1}}+\sqrt{9-\sqrt{9^2-1}}+\sqrt{10-\sqrt{10^2-1}}+\ldots+\sqrt{800-\sqrt{800^2-1}}$$

Ответ. Вариант 1: $\sqrt{\dfrac{201}{2}}+10-\sqrt{\dfrac{1}{2}}$, вариант 2: $\sqrt{\dfrac{801}{2}}+18-\sqrt{\dfrac{7}{2}}$.

Решение. Заметим, что при $x > 1$ верны равенства $x = \dfrac{x+1}{2}+\dfrac{x-1}{2}$ и $\sqrt{x^2-1} = 2\sqrt{\dfrac{x+1}{2}\cdot\dfrac{x-1}{2}}$.
Поэтому $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{\dfrac{x+1}{2}}-\sqrt{\dfrac{x-1}{2}}$. Сумма

$$\sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}+\sqrt{a+1-\sqrt{(a+1)^2-1}}+\sqrt{a+2-\sqrt{(a+2)^2-1}}+\ldots+\sqrt{b-\sqrt{b^2-1}}$$

равна $\sqrt{\dfrac{b+1}{2}}+\sqrt{\dfrac{b}{2}}-\sqrt{\dfrac{a-1}{2}}-\sqrt{\dfrac{a}{2}}$.

Комментарий. Под знаком корня выделен полный квадрат — не менее 4 баллов за задачу. Ответ без обоснования — 0 баллов.

В вариант включается одна из двух задач 10.2 и 10.3.

M10.1-1 Про положительные числа a и b известно, что

$$a+b+4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+2\right)=4\sqrt{a+1}+4\sqrt{b+1}.$$

Вычислите a^2+b^2.

M10.1-2 Про положительные числа a и b известно, что

$$a+b+4=2\left(\sqrt{2a+1}-\frac{1}{a}+\sqrt{2b+1}-\frac{1}{b}\right).$$

Вычислите a^2+b^2.

Ответ. Вариант 1: $24+16\sqrt{2}$; вариант 2: $6+4\sqrt{2}$.

Решение варианта 1. Равенство эквивалентно $\frac{2}{a}\left(a/2-\sqrt{a+1}\right)^2+\frac{2}{b}\left(b/2-\sqrt{b+1}\right)^2=0$, поэтому $a/2=\sqrt{a+1}$ и $b/2=\sqrt{b+1}$. Получаем $a=b=2\cdot(1+\sqrt{2})$.

Решение варианта 2 получается из решения предыдущего варианта заменой $a/2$ и $b/2$ на новые переменные. В этом случае $a=b=1+\sqrt{2}$.

M10.2-1 Сколько способов выбрать на координатной плоскости две точки (a,b) и (m,n) с целыми неотрицательными координатами, не превосходящими 20, так, чтобы хотя бы одна из точек лежала на прямой $y=x$, но ни абсциссы, ни ординаты этих точек не были равны?

M10.2-2 Сколько способов выбрать на координатной плоскости две точки (a,b) и (m,n) с целыми неотрицательными координатами, не превосходящими 30, так, чтобы хотя бы одна из точек лежала на прямой $y=x$, но ни абсциссы, ни ординаты этих точек не были равны?

Ответ. Вариант 1: $C_{21}^2+21\cdot 380$, вариант 2: $C_{31}^2+31\cdot 870$.

Решение. Пусть координаты не превосходят $2n$ (в первом варианте $n=10$, а во втором $n=15$). Если обе точки лежат на прямой $y=x$, то число способов выбрать их равно C_{2n+1}^2. Если же только одна точка лежит на этой прямой, то число способов выбрать её равно $2n+1$, и после этого вторую точку можно выбрать $(2n+1)^2-(3\cdot(2n+1)-2)$ способами (можно брать любую точку, кроме точек на прямой $y=x$ и точек на одной горизонтали или вертикали с выбранной). Итоговое число способов равно $C_{2n+1}^2+(2n+1)\cdot\big((2n+1)^2-3\cdot(2n+1)+2\big)$.

Комментарий. Комбинаторная ошибка в одном из случаев — 0 баллов за соответствующий случай.

Ответ не доведён до числа — баллы не снимаются.

M10.3-1 Найдите количество способов представить число $2^3\cdot 3^4\cdot 5^6$ в виде произведения трёх натуральных чисел $x\cdot y\cdot z$. Порядок сомножителей важен, т. е., к примеру, $x=2^3$, $y=3^4$, $z=5^6$ и $x=3^4$, $y=2^3$, $z=5^6$ — разные способы.

M10.3-2 Найдите количество способов представить число $3^5\cdot 7^2\cdot 11^5$ в виде произведения трёх натуральных чисел $x\cdot y\cdot z$. Порядок сомножителей важен, т. е., к примеру, $x=3^5$, $y=7^2$, $z=11^5$ и $x=7^2$, $y=3^5$, $z=11^5$ — разные способы.

Ответ. Вариант 1: $C_5^2\cdot C_6^2\cdot C_8^2$, вариант 2: $C_7^2\cdot C_4^2\cdot C_7^2$.

Решение. Решать задачу можно для каждого простого множителя по отдельности. Число p^k раскладывается в произведение трёх натуральных чисел с учётом порядка C_{k+2}^2 способами. Поэтому искомое число способов равно $C_5^2\cdot C_6^2\cdot C_8^2$.

Комментарий. Комбинаторная ошибка — 0 баллов за задачу.

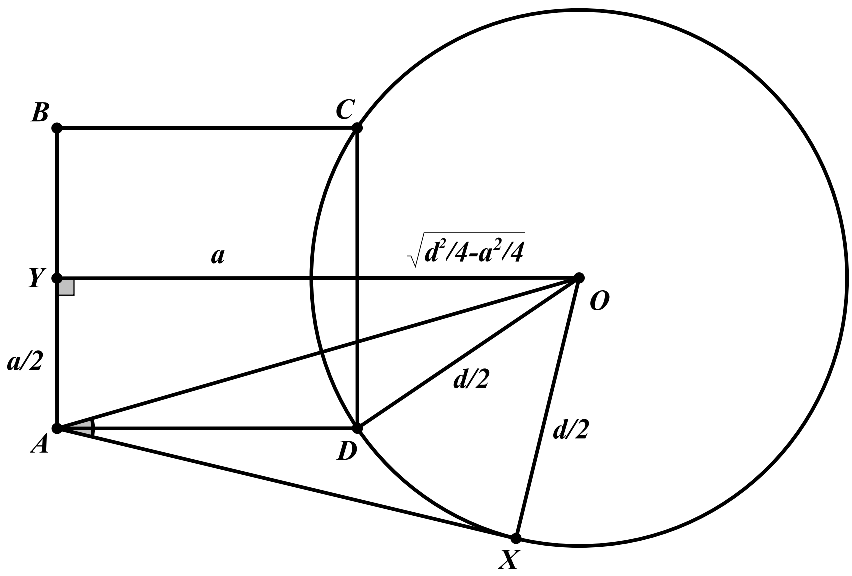
Ответ не доведён до числа — баллы не снимаются.

M10.4-1 Из вершины A квадрата $ABCD$ проведены две касательные к окружности ω, проходящей через вершины C и D. Вычислите угол между этими касательными, если известно, что диаметр окружности относится к стороне квадрата как $13:6$, а центр окружности лежит вне квадрата.

M10.4-2 Из вершины A квадрата $ABCD$ проведены две касательные к окружности ω, проходящей через вершины C и D. Вычислите угол между этими касательными, если известно, что диаметр окружности относится к стороне квадрата как $5:2$, а центр окружности лежит вне квадрата.

Ответ. Вариант 1: угол равен $2\arcsin\dfrac{13}{\sqrt{985}}$; вариант 2: угол равен $2\arcsin\dfrac{5}{\sqrt{137}}$.

Решение. Пусть диаметр окружности d в k раз больше стороны квадрата a. Обозначим через O центр окружности, а через X — точку касания, ближайшую к D.



Половина угла α между касательными может быть найдена из прямоугольного треугольника OAX:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{OX}{OA} = \frac{OX}{\sqrt{AY^2+OY^2}} = \frac{OX}{\sqrt{AB^2/4+(AB+\sqrt{OD^2-AB^2/4})^2}} =$$

$$= \frac{d/2}{\sqrt{a^2/4+(a+\sqrt{d^2/4-a^2/4})^2}} = \frac{k/2}{\sqrt{k^2/4+1+\sqrt{k^2-1}}}.$$

Остаётся подставить $k=13/6$ для первого варианта и $k=5/2$ для второго варианта.

M10.5-1 Найдите наибольшее значение параметра a, при котором система имеет хотя бы одно решение:

$$\begin{cases}\sqrt{(x-a)^2+(y+3)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(y-a)^2}=\sqrt{2a^2+10a+13}\\ y=a^2-4a-6\end{cases}$$

M10.5-2 Найдите наибольшее значение параметра a, при котором система имеет хотя бы одно решение:

$$\begin{cases}\sqrt{(x+a)^2+(y+3)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-a)^2}=\sqrt{2a^2+14a+25}\\ y=a^2-5a-7\end{cases}$$

Ответ. Вариант 1: $a_{\max} = 6$; вариант 2: $a_{\max} = 7$.

Решение варианта 1. В левой части первого уравнения системы записана сумма расстояний от точки с координатами $(x; y)$ до пары точек, имеющих координаты $(a; -3)$ и $(-2; a)$. Правая часть этого уравнения равна расстоянию между последними двумя точками. В силу неравенства треугольника первое уравнение задаёт все точки отрезка с концами $(a; -3)$ и $(-2; a)$.
Второе уравнение задает семейство прямых, параллельных оси OX. Требуется, чтобы эти прямые пересекали отрезок, заданный первым уравнением. Это означает, что $y \in [-3; a]$ (при $a < -3$ требуемых значений параметра не существует), т. е. $-3 \leq a^2 - 4a - 6 \leq a$. Решая эту систему и отбрасывая отрицательные значения (среди них нет наибольшего), получаем $a \in [2 + \sqrt{7}; 6]$, максимальное значение равно 6.

Комментарий. Дана правильная геометрическая интерпретация первого уравнения системы — не менее 3 баллов за задачу.

В вариант включается одна из двух задач 11.3 и 11.4.

M11.1-1 Известно, что $7x^3 - 15x^2 - 15x - 5 = 0$. Вычислите $\sqrt[3]{\dfrac{5}{12}} \cdot \left(\dfrac{1}{x} + 1\right)$.

M11.1-2 Известно, что $9x^3 - 12x^2 - 12x - 4 = 0$. Вычислите $\sqrt[3]{\dfrac{4}{13}} \cdot \left(\dfrac{1}{x} + 1\right)$.

Ответ. 1.

Решение. Пусть известно, что $px^3 - 3qx^2 - 3qx - q = 0$, а вычислить требуется $r \cdot \left(\dfrac{1}{x} + 1\right)$. Тогда $\dfrac{p}{q} = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{3}{x}$. Выражение, которое нужно найти, возведём в куб:

$$r^3\left(1 + \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x}\right) = r^3\left(1 + \frac{p}{q}\right).$$

Комментарий. Ответ без обоснования — 0 баллов за задачу.

M11.2-1 Про функции $f(x)$ и $g(x)$ известно, что $2f(2x/3 - 11) + 8g(x+2) = 32x - 224$ и $3f(-5x/4 + 1) - 4g(3x/2 - 7) = 88x - 57$ при всех вещественных x. Найдите $f(-9)$.

M11.2-2 Про функции $f(x)$ и $g(x)$ известно, что $2f(2x/3 - 11) + 8g(x+2) = 32x - 226$ и $3f(-5x/4 + 1) - 4g(3x/2 - 7) = 101 - 57x$ при всех вещественных x. Найдите $f(-9)$.

Ответ. Вариант 1: $f(-9) = 583/4$; вариант 2: $f(-9) = -105$.

Решение варианта 1. Подставив в первое равенство $x = 3$, а во второе $x = 8$, получим систему линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 2f(-9) + 8g(5) = -128, \\ 3f(-9) - 4g \cdot 5 = 647. \end{cases}$$

Решив эту систему, находим искомое значение $f(-9) = 583/4$.

M11.3-1 Известно, что $\sin(x - 2z) = 5\sin(x + 4z)$. Найдите отношение $\dfrac{\operatorname{tg} 3z}{\operatorname{tg}(x+z)}$, если известно, что оно определено.

M11.3-2 Известно, что $\sin(x - 4z) = 3\sin(x + 6z)$. Найдите отношение $\dfrac{\operatorname{tg} 5z}{\operatorname{tg}(x+z)}$, если известно, что оно определено.

Ответ. Вариант 1: $\dfrac{\operatorname{tg} 3z}{\operatorname{tg}(x+z)} = -\dfrac{2}{3}$; вариант 2: $\dfrac{\operatorname{tg} 5z}{\operatorname{tg}(x+z)} = -\dfrac{1}{2}$.

Решение варианта 1. Перейдём к переменным z и $t = x + z$. Тогда исходное соотношение примет вид $\sin(t - 3z) = 5\sin(t + 5z)$. С помощью формул синуса суммы и разности приходим к равенству $6\sin 3z \cos t = -4\sin t \cos 3z$, откуда искомое отношение равно $-4/6$.

Комментарий. Ошибка в тригонометрической формуле — 0 баллов за задачу.

M11.4-1 Решите систему

$$\begin{cases} 4\sin 2x \sin 3y + 1 = 4\sin 4z, \\ 4\sin 3y \sin 4z + 1 = 4\sin 2x, \\ 4\sin 4z \sin 2x + 1 = 4\sin 3y. \end{cases}$$

M11.4-2 Решите систему
$$\begin{cases} 4\cos x\cos 2y + 1 = -4\cos 3z, \\ 4\cos 2y\cos 3z + 1 = -4\cos x, \\ 4\cos 3z\cos x + 1 = -4\cos 2y. \end{cases}$$

Ответ. Вариант 1: $x = (-1)^k\cdot\dfrac{\pi}{12}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, $y = (-1)^k\cdot\dfrac{\pi}{18}+\pi l,\ l\in\mathbb{Z}$, $z = (-1)^k\cdot\dfrac{\pi}{24}+\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$. Вариант 2: $x = \pm\dfrac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, $y = \pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, $z = \pm\dfrac{\pi}{9}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$,

Решение. Замена $a = \sin 2x$, $b = \sin 3y$, $c = \sin 4z$ (для первого варианта) и $a = -\cos x$, $b = -\cos 2y$, $c = -\cos 3z$ для второго приводит к системе
$$\begin{cases} 4ab + 1 = 4c, \\ 4bc + 1 = 4a, \\ 4ca + 1 = 4b. \end{cases}$$

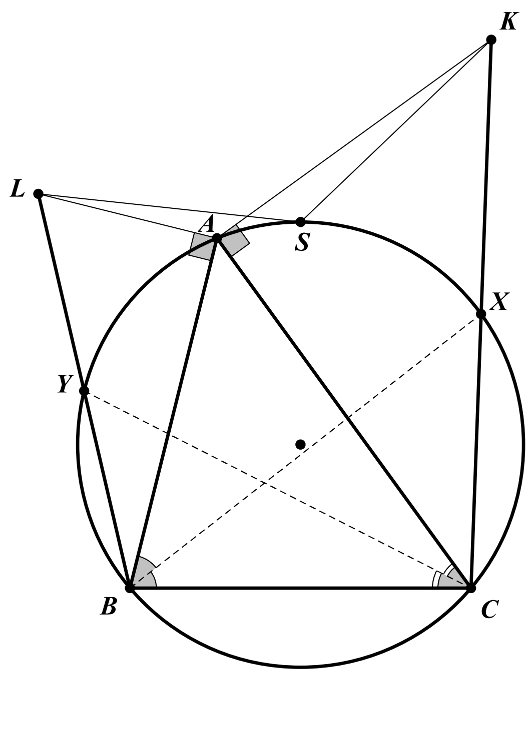
Вычитанием второго уравнения из первого получим $(b+1)(a-c) = 0$. Если $b = -1$, то $c+a = 1/4$ и $ca = -5/4$, откуда одно из чисел c и a равно $5/4$, а второе -1. Это невозможно, поскольку все три переменные не превосходят 1. Значит, $a = c$. Аналогично и $b = c$. Тогда любое из уравнений имеет вид $4a^2 - 4a + 1 = 0$, т. е. $a = b = c = 1/2$.

Комментарий. Верно решена система уравнений на a, b и c — не менее 4 баллов за задачу. Сделана замена переменных, приводящая к системе уравнений на a, b и c, но дальнейших продвижений нет — баллы не начисляются.

M11.5-1 В треугольнике ABC, вписанном в окружность ω, проведены биссектрисы углов B и C до пересечения с ω в точках X и Y, а K и L — точки на лучах CX и BY соответственно такие, что $\angle KAC = \angle LAB = 90°$. Пусть S — середина дуги CAB. Оказалось, что $SX = 5$. Найдите LY.

M11.5-2 В треугольнике ABC, вписанном в окружность ω, проведены биссектрисы углов B и C до пересечения с ω в точках X и Y, а K и L — точки на лучах CX и BY соответственно такие, что $\angle KAC = \angle LAB = 90°$. Пусть S — середина дуги CAB. Оказалось, что $KX = 5$. Найдите SY.

Ответ. 5.



Решение. Дуги XS, AY, YB равны, поэтому AY — медиана прямоугольного треугольника ABL, и $YL = YB = YA = SX$. Аналогично $SY = KX$. Треугольники XSK и YSL равны.

Комментарий. Отмечено равенство $SX = AY$ или $SY = AX$ — 2 балла.
Ответ без обоснования — 0 баллов за задачу.